分解定理の流体及び電磁流体力学への応用

Nara Women's University

自然科学系・数学領域　**柳沢 卓**　教授　YANAGISAWA Taku　博士(理学)(北海道大学)

■研究キーワード　非線型偏微分方程式,流体力学,関数解析

■主な所属学会　日本数学会 Japan Mathematical Sociaty

■研究者総覧　https://koto10.nara-wu.ac.jp/profile/ja.c73ea5af57ce20f3520e17560c007669.html

研究者総覧

研究過程（現在までの研究プロセス）

【端緒】　本研究は，私が修士課程2年の夏に，カリフォルニア大学の加藤敏夫先生が双曲型境界値問題の議論の為，私の指導教員であった白田平先生を北海道大学に訪ねてこられた際，タイプ打ちで数ページの短い共著論文のプレプリントを置いて行って下さったことに始まります．短い論文とはいえ，その内容は流体の基礎方程式である非圧縮Euler方程式の解の特異性の発現と渦度との明示的関係を与えるシンプルな主張と巧妙な不等式が組み合わさった大変興味深いものでした．更に論文の最後に，流体の満たされる領域が境界をもつ場合については今後の課題であると書かれていたこともあり，白田先生のご指導も頂きながら考察を進め，加藤先生等の主張（現在では，Beale-Kato-Majda's Criterion等と呼ばれています）の有界領域版に対応する一応の結果を得ることができました．これがこの研究の端緒となります．

【方法と特色】上記研究においては，Biot-Savartの定理とよばれる全空間における非圧縮速度場を渦度で表現する主張を，有界領域上のHelmholtz-Weyl分解(以下，H-W分解と記す)とよばれるベクトル場の分解定理に読みかえ，そこに現れるベクトルポテンシャルの詳細な評価を行うという方法をとりました（実は，修士論文作成時にはどうしてもこのベクトルポテンシャルに表れるGreen関数を明示的に構成することが出来ませんでした．既に1960年代にこのGreen関数がロシアの数学者V.Solonnikov氏によって構成されていたことを知ったのは，私が本学に赴任した後のことでした．）H-W分解定理においては，Biot-Savartの定理では現れなかった調和ベクトル場が新たな分解成分として加ってくる点に特色があります．更に，この調和ベクトル場全体のなす空間の代数的構造が対象領域の（境界成分の数あるいは境界の穴の数といった）位相的構造と関連するという著しい性質が知られています（De Rhamの定理）.

研究過程(続き)と今後の課題

【MHD方程式】　以上の研究とは独立に，対称双曲系の境界値問題への興味からプラズマを記述する基礎方程式としての磁気流体力学方程式（MHD方程式）の初期境界値問題の研究を，本学に赴任する少し前から始めました（数学的問題設定において，北海道大学の上見練太郎先生のご指導を受けました）．当時京都大学工学部に所属されていた松村考昭先生との共同研究により，圧縮性理想MHD方程式の完全導体境界条件下における時間的局所解の存在証明を与えることができました．この結果はトカマク等のプラズマ発電と関連することもあり，JT60の理論的側面に関する研究会で何度か講演させて頂きました．

【H-W分解の見直しとNavier-Stokes 及びMHD方程式等への応用】2000年前後の10年程，当時東北大学に所属されていた小薗英雄先生と共同研究を継続的に行い，変分不等式を通したアプローチ法により有界領域上のLp型H-W分解定理を得ることができました．その後，京都大学の清水扇丈先生及びダルムシュタット工科大学の研究者も交えて，これらの外部領域（有界領域の補集合）版の結果も示しました．また，この研究過程で，領域上の微分形式を考えることにより自然に表れる２種の境界条件下における調和ベクトル場全体のなす空間の構造と対象領域の位相的構造との関係の見直しも行いました．

　以上により，H-W分解を種々の偏微分方程式の境界値問題の解析に組み込むことにより，対象領域のトポロジカルな形態と（解の存在・安定性も含めた）解空間の構造との関係に切り込む一つアプローチ法を確立できたと考えています．既に，Navier-Stokes方程式の定常解への応用に関する結果をいくつか公表していますが，現在進行中の研究も含めた今後の課題として以下を挙げておきましょう： ①MHD方程式の境界値問題に対する関数解析的枠組みへのH-W分解の組み込み．②MHD定常解の存在・非存在，あるいは安定性と対象領域のトポロジーとの関係に関する研究.