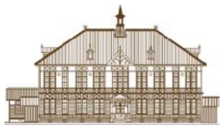
L 関数の研究

Nara Women's University

自然科学系・数学領域　**梅垣　由美子**　教授　UMEGAKI Yumiko　博士（数理学）（名古屋大学）



■研究キーワード　解析数論 / Dirichlet L 関数 / 保型 L 関数

■主な所属学会　日本数学会

■研究者総覧　https://koto10.nara-wu.ac.jp/profile/ja.6eecbb3629d06096520e17560c007669.html

研究者総覧

研究概要

Dirichlet L 関数や保型 L 関数などを解析的に研究しています。歴史的には Euler が実関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

を用いて素数を研究したことがその原点です。1737 年に Euler によって，この関数は Euler 積とよばれる素数 p をわたる無限積表示

$$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

を持つことが示され，この関数を用いた素数の研究が始まりました。1859 年にRiemann は $\zeta(s)$ を複素関数に拡張し，$\zeta(s)$ の零点と素数分布との関係を明らかにし，有名な Riemann 予想を述べました。現在では，この関数は Riemann の ζ 関数とよばれています。1896 年には Hadamard や de la Vallée Poussin によって $\zeta(s)$ の零点の存在しない範囲が研究され，

$$\pi(x)=\#\{p\leq x \mid p:\ \text{prime number}\}\sim\frac{x}{\log x}$$

が得られました。このように興味ある対象物に相応しいゼータ関数や L 関数を導入することによって，解析的な考察が可能となります。特に零点や特殊値を調べることはとても重要です。例えば，代数体や保型形式の L 関数の解析的考察は類数や楕円曲線の解析的階数と関係します。

研究のプロセス・研究事例

1. Dirichlet L 関数の特殊値とその応用に関する研究

Dirichle L 関数の $s=1$ における値は代数体の類数の情報を持っています。この値に関する研究で有理数体上に類数の大きい拡大体が無限に存在することをタイプ別に証明しました。また，Dirichlet L 関数の $s=1$ における値の解析数論的な研究を格子暗号へ応用することにも注目をしています。暗号理論や符号理論に関しては企業や大学にお勤めの専門家の方々にご協力いただいて、学生向けのセミナーも実施しています。

2. 保型 L 関数の解析的研究

保型 L 関数の関数等式の折り返しの点における non-vanishing など、解析的階数などに関する研究に興味があります。この解析的階数は対応する楕円曲線の有理点からなる集合の階数と関係します。楕円曲線に関する情報を取り出すためには、対象とする保型形式を new form とよばれる一部のものに制限する必要があります。実際にレベルに制限が付きますが、保型形式の空間の基底に関する Petersson's formula を new form に限定した形で得ることができたので、その応用研究を進めています。

3. 値分布

ゼータ関数や L 関数の値の平均値に関する密度関数の構成と，その密度関数の応用に興味があります。特に保型 L 関数の密度関数の構成には Sato-Tate 測度が関係することを導きました。対象となるゼータ関数や L 関数、そして、平均の取り方が測度と関係すると考えられます。